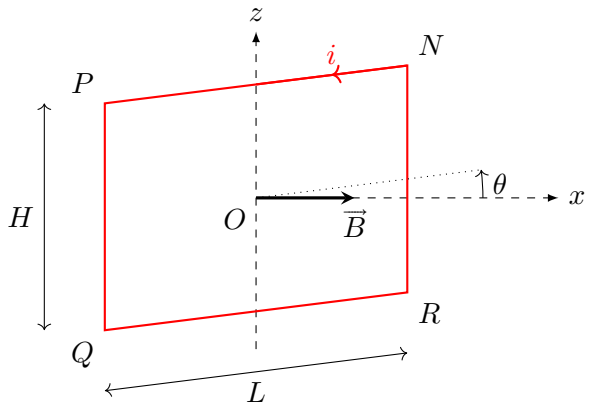
Électromagnétisme – Chapitre 1

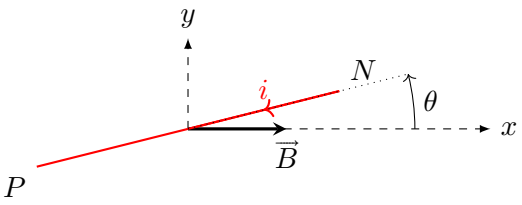
Rappels d'induction – TD

Exercice 1 : Actions de Laplace sur une spire rectangulaire

On considère une spire rectangulaire $NPQR$ de largeur L, de hauteur H, centrée en O, parcourue par une intensité i et qui peut tourner autour de l'axe vertical (Oz). On note θ l'angle que réalise la spire par rapport à l'axe horizontal (Ox), comme représenté ci-dessous. Elle est plongée dans un champ magnétique uniforme et stationnaire $\vec{B} = B\,\vec{e}_x$.



Vue de profil



Vue de dessus

1. Exprimer la force de Laplace subie par chaque côté de la spire, puis en déduire la résultante $\vec{F}_{\text{L}}$ des forces de Laplace subies par la spire.
2. Exprimer le moment mécanique par rapport à O subi par chaque côté de la spire, puis en déduire l'expression du couple $\vec{M}_{\text{L}}$ des actions de Laplace subies par la spire en fonction de i, L, H, B et θ.
3. Montrer que ce couple peut s'exprimer en fonction du moment magnétique $\vec{m}$ de la spire tel que :

$$\vec{M}_{\text{L}} = \vec{m} \wedge \vec{B}.$$

4. Discuter la stabilité des différentes positions d'équilibre de la spire.

Correction :

1. La force de Laplace subie par chaque côté de la spire est :
   - $\vec{F}_{NP} = i\,\overrightarrow{NP} \wedge \vec{B} = i\left[-L\left(\cos\theta\,\vec{e}_x + \sin\theta\,\vec{e}_y\right)\right] \wedge (B\,\vec{e}_x) = i\,L\,B\sin\theta\,\vec{e}_z$;
   - $\vec{F}_{PQ} = i\,\overrightarrow{PQ} \wedge \vec{B} = i\,(-H\,\vec{e}_z) \wedge (B\,\vec{e}_x) = -i\,H\,B\,\vec{e}_y$;
   - $\vec{F}_{QR} = i\,\overrightarrow{QR} \wedge \vec{B} = i\left[L\left(\cos\theta\,\vec{e}_x + \sin\theta\,\vec{e}_y\right)\right] \wedge (B\,\vec{e}_x) = -i\,L\,B\sin\theta\,\vec{e}_z$;
   - $\vec{F}_{RN} = i\,\overrightarrow{RN} \wedge \vec{B} = i\,(H\,\vec{e}_z) \wedge (B\,\vec{e}_x) = i\,H\,B\,\vec{e}_y$;

   d'où on en déduit la résultante des forces de Laplace : $\vec{F}_{\text{L}} = \vec{F}_{NP} + \vec{F}_{PQ} + \vec{F}_{QR} + \vec{F}_{RN} = \vec{0}$.
2. Le moment mécanique par rapport à O subi par chaque côté de la spire est :
   - $\vec{M}_{NP} = \overrightarrow{OM_1} \wedge \vec{F}_{NP}$, avec M_1 le milieu du segment $[NP]$, soit : $\vec{M}_{NP} = \vec{0}$ comme $\vec{F}_{NP}$ et $\overrightarrow{OM_1}$ sont dirigés selon $\vec{e}_z$;
   - $\vec{M}_{PQ} = \overrightarrow{OM_2} \wedge \vec{F}_{PQ}$, avec M_2 le milieu du segment $[PQ]$, soit : $\vec{M}_{PQ} = \left[-\dfrac{L}{2}\left(\cos\theta\,\vec{e}_x + \sin\theta\,\vec{e}_y\right)\right] \wedge (-i\,H\,B\,\vec{e}_y) = \dfrac{L\,i\,H\,B}{2}\cos\theta\,\vec{e}_z$;
   - $\vec{M}_{QR} = \overrightarrow{OM_3} \wedge \vec{F}_{QR}$, avec M_3 le milieu du segment $[QR]$, soit : $\vec{M}_{QR} = \vec{0}$ comme $\vec{F}_{QR}$ et $\overrightarrow{OM_3}$ sont dirigés selon $\vec{e}_z$;

- $\overrightarrow{M}_{RN} = \overrightarrow{OM_4} \wedge \overrightarrow{F}_{RN}$, avec M_4 le milieu du segment $[RN]$, soit : $\overrightarrow{M}_{RN} = \left[\dfrac{L}{2}\left(\cos\theta\,\vec{e}_x + \sin\theta\,\vec{e}_y\right)\right] \wedge \left(i\,H\,B\,\vec{e}_y\right) = \dfrac{L\,i\,H\,B}{2}\cos\theta\,\vec{e}_z$;

d'où on en déduit le couple des actions de Laplace : $\overrightarrow{M}_{\text{L}} = \overrightarrow{M}_{NP} + \overrightarrow{M}_{PQ} + \overrightarrow{M}_{QR} + \overrightarrow{M}_{RN} = i\,L\,H\,B\cos\theta\,\vec{e}_z$.

3. Le moment magnétique de la spire s'exprime : $\overrightarrow{m} = i\,\overrightarrow{S}$, avec $\overrightarrow{S} = L\,H\left(\sin\theta\,\vec{e}_x - \cos\theta\,\vec{e}_y\right)$ sa surface orientée, d'où : $\overrightarrow{m} = i\,L\,H\left(\sin\theta\,\vec{e}_x - \cos\theta\,\vec{e}_y\right)$.

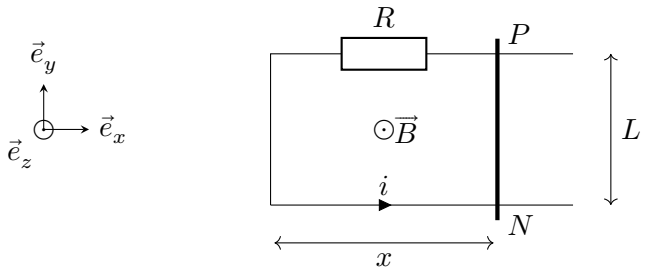
Comme $\overrightarrow{m} \wedge \overrightarrow{B} = i\,L\,H\,B\cos\theta\,\vec{e}_z$, on obtient : $\overrightarrow{M}_{\text{L}} = \overrightarrow{m} \wedge \overrightarrow{B}$.

4. Les positions d'équilibre correspondent à $\overrightarrow{M}_{\text{L}} = \vec{0}$, soit :

- la position $\theta = \dfrac{\pi}{2}$ correspond à un équilibre stable car :
  - si θ augmente, la spire subit un moment $\overrightarrow{M}_{\text{L}}$ orienté selon $-\vec{e}_z$, ce qui la ramène à cette position ;
  - si θ diminue, la spire subit un moment $\overrightarrow{M}_{\text{L}}$ orienté selon $+\vec{e}_z$, ce qui la ramène à cette position ;
- la position $\theta = -\dfrac{\pi}{2}$ correspond à un équilibre instable car :
  - si θ augmente, la spire subit un moment $\overrightarrow{M}_{\text{L}}$ orienté selon $+\vec{e}_z$, ce qui l'éloigne de cette position ;
  - si θ diminue, la spire subit un moment $\overrightarrow{M}_{\text{L}}$ orienté selon $-\vec{e}_z$, ce qui l'éloigne de cette position.

Exercice 2 : Rails de Laplace soumis à une force

On considère le dispositif des rails de Laplace présenté ci-dessous. Il est constitué de deux rails conducteurs fixes horizontaux espacés d'une distance L, sur lesquels peut se déplacer une barre conductrice mobile NP de masse m. Le circuit formé possède une résistance totale R. Il est plongé dans un champ magnétique stationnaire et uniforme $\overrightarrow{B} = B\,\vec{e}_z$.



On note $\vec{v} = v(t)\,\vec{e}_x = \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\,\vec{e}_x$ la vitesse de la barre, sur laquelle on applique une force constante $\overrightarrow{F} = F\,\vec{e}_x$ à partir de l'instant $t = 0$. On suppose que la barre ne possède pas de vitesse initiale.

1. Exprimer l'intensité $i(t)$ dans le circuit en fonction de la vitesse $v(t)$ de la barre à l'aide de la loi de Faraday.

2. Établir l'équation différentielle vérifiée par la vitesse $v(t)$ à l'aide du principe fondamental de la dynamique.

3. En déduire l'expression de $v(t)$, puis celle de $i(t)$.

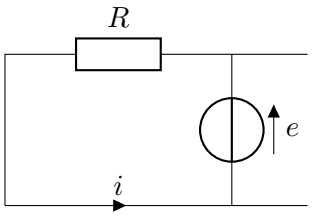
4. Établir un bilan de puissance électrique pour le système.

5. Établir un bilan de puissance mécanique pour le système.

6. Montrer que la puissance mécanique fournie par la force de Laplace est intégralement convertie en puissance électrique dissipée dans la résistance.

Correction :

1. Le flux du champ magnétique $\overrightarrow{B}$ à travers le circuit est : $\Phi = B\,\vec{e}_z \cdot L\,x\,\vec{e}_z = B\,L\,x$, d'où on en déduit la force électromotrice induite à l'aide de la loi de Faraday : $e(t) = -\dfrac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t} = -B\,L\,v(t)$. On peut alors représenter le circuit électrique équivalent :



L'application de la loi des mailles donne : $e(t) = R\,i(t)$, d'où : $i(t) = \dfrac{e(t)}{R} = -\dfrac{B\,L\,v(t)}{R}$.

2. La barre est soumise à quatre forces :

- son poids $\overrightarrow{P} = -m\,g\,\vec{e}_z$;
- la réaction normale des rails $\overrightarrow{R}_\text{n} = R_\text{n}\,\vec{e}_z$;
- la force constante $\overrightarrow{F} = F\,\vec{e}_x$;
- la force de Laplace $\overrightarrow{F_\text{L}} = i(t)\,\overrightarrow{NP} \wedge \overrightarrow{B} = i(t)\,L\,B\,\vec{e}_x$.

La projection du PFD selon $\vec{e}_x$ donne : $m\,\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = F + i(t)\,L\,B$, d'où : $\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} + \dfrac{B^2\,L^2}{m\,R}\,v(t) = \dfrac{F}{m}$.

3. En posant $\tau = \dfrac{m\,R}{B^2\,L^2}$, on obtient l'équation différentielle : $\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} + \dfrac{v(t)}{\tau} = \dfrac{F}{m}$.

La solution est de la forme : $v(t) = A\,\mathrm{e}^{-t/\tau} + \dfrac{F\,\tau}{m}$, avec A une constante que l'on détermine à l'aide de la condition initiale : $v(0) = 0 = A + \dfrac{F\,\tau}{m}$, d'où : $A = -\dfrac{F\,\tau}{m}$, soit : $v(t) = \dfrac{F\,\tau}{m}\left(1 - \mathrm{e}^{-t/\tau}\right)$.

On en déduit ensuite l'intensité : $i(t) = -\dfrac{B\,L\,v(t)}{R} = -\dfrac{F}{B\,L}\left(1 - \mathrm{e}^{-t/\tau}\right)$.

4. En multipliant la loi des mailles par l'intensité $i(t)$, on obtient : $e(t)\,i(t) = R\,i(t)^2$. Il s'agit du bilan de puissance électrique du système, avec :

- $e(t)\,i(t)$ la puissance électrique fournie par la force électromotrice induite ;
- $R\,i(t)^2$ la puissance électrique dissipée par effet Joule dans la résistance.

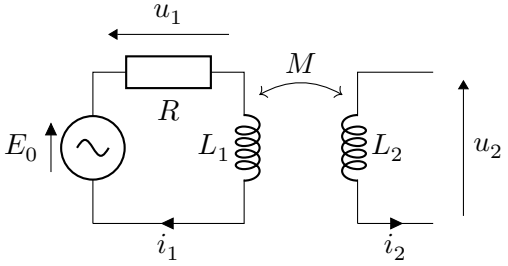
5. En multipliant la projection du PFD par la vitesse $v(t)$, on obtient : $m\,\dfrac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t}\,v(t) = F\,v(t) + F_\text{L}\,v(t)$. Il s'agit du bilan de puissance mécanique du système, avec :

- $m\,\dfrac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t}\,v(t) = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\dfrac{1}{2}\,m\,v(t)^2\right)$ la variation de l'énergie cinétique de la barre ;
- $F\,v(t)$ la puissance mécanique fournie par l'opérateur qui exerce la force $\overrightarrow{F}$;
- $F_\text{L}\,v(t)$ la puissance mécanique fournie par la force de Laplace.

6. La puissance mécanique fournie par la force de Laplace peut s'exprimer : $P_{\overrightarrow{F_\text{L}}} = i(t)\,L\,B\,v(t) = i(t)\,L\,B\left(-\dfrac{R\,i(t)}{B\,L}\right) = -R\,i(t)^2 = -P_\text{R}$, elle est donc intégralement convertie en puissance électrique dissipée dans la résistance.

Exercice 3 : Mesure d'une inductance mutuelle

On souhaite mesurer le coefficient d'inductance mutuelle M entre les deux bobines du montage ci-dessous.



La première bobine, d'inductance propre L_1, est reliée en série avec une résistance $R = 1{,}0\,\text{k}\Omega$ et un générateur de tension sinusoïdale d'amplitude E_0 et de fréquence $f = 10\,\text{kHz}$. La seconde bobine, d'inductance propre L_2, est en circuit ouvert.

1. Quelle est l'intensité i_2 circulant dans la seconde bobine ?

2. Exprimer la tension $u_2(t)$ en fonction de la tension $u_1(t)$ et du coefficient M.

On mesure des tensions d'amplitudes $U_1 = 3{,}0\,\text{V}$ et $U_2 = 1{,}0\,\text{V}$ à l'aide d'un oscilloscope.

3. En déduire la valeur du coefficient M.

Correction :

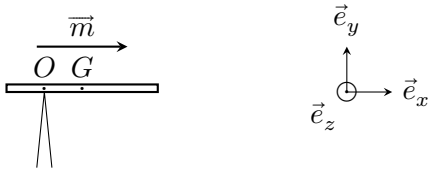
1. Comme la seconde bobine est en circuit ouvert, on a forcément : $i_2 = 0$.

2. La tension aux bornes de la seconde bobine s'exprime : $u_2 = L_2 \dfrac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t} + M \dfrac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t} = M \dfrac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t}$, avec $u_1 = R\,i_1$ d'après la loi d'Ohm, d'où : $u_2 = \dfrac{M}{R} \dfrac{\mathrm{d}u_1}{\mathrm{d}t}$.

3. En représentation complexe, on obtient : $\underline{U}_2 = \dfrac{M}{R}\,\mathrm{j}\,\omega\,\underline{U}_1$, soit en module : $U_2 = \dfrac{M}{R}\,\omega\,U_1$, d'où on en déduit : $M = \dfrac{R\,U_2}{2\,\pi\,f\,U_1} = 5{,}3\,\text{mH}$.

Exercice 4 : Aimant en équilibre

Un aimant rectiligne de masse M_0, de centre de gravité G et de moment magnétique $\overrightarrow{m} = m\,\vec{e}_x$ est posé sur le sommet O d'une pointe, comme représenté ci-dessous. Il est soumis à un champ magnétique $\overrightarrow{B}$ uniforme, et au champ de pesanteur $\vec{g} = -g\,\vec{e}_y$.



1. Déterminer l'orientation du champ $\overrightarrow{B}$ et la distance $d = OG$ permettant à l'aimant de rester horizontalement en équilibre sur la pointe.

Correction :

1. L'aimant est soumis à trois moments mécaniques par rapport à O :

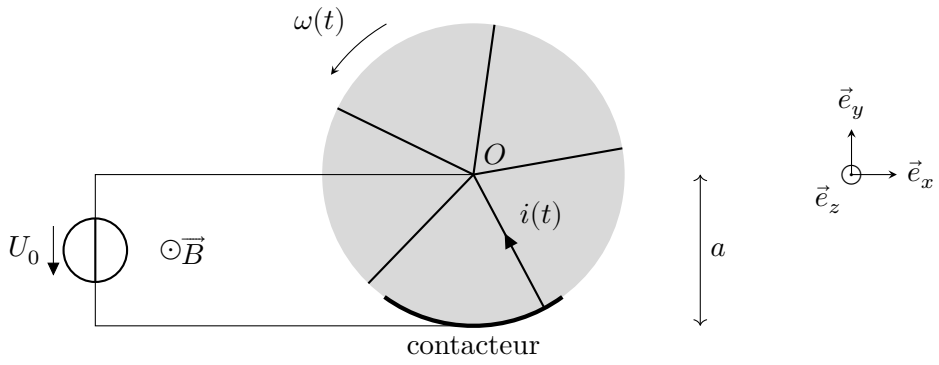
- le moment de son poids $\overrightarrow{P}$: $\overrightarrow{M_O}(\overrightarrow{P}) = \overrightarrow{OG} \wedge \overrightarrow{P} = d\,\vec{e}_x \wedge -M_0\,g\,\vec{e}_y = -d\,M_0\,g\,\vec{e}_z$;
- le moment de la réaction normale $\overrightarrow{R}$ de la pointe : $\overrightarrow{M_O}(\overrightarrow{R}) = \overrightarrow{OO} \wedge \overrightarrow{R} = \vec{0}$;
- le couple des actions de Laplace : $\overrightarrow{M_\text{L}} = \overrightarrow{m} \wedge \overrightarrow{B} = m\,\vec{e}_x \wedge \left(B_x\,\vec{e}_x + B_y\,\vec{e}_y + B_z\,\vec{e}_z\right) = m\,B_y\,\vec{e}_z - m\,B_z\,\vec{e}_y$.

L'aimant est en équilibre si la somme des moments est nulle, soit : $\overrightarrow{M_O}(\overrightarrow{P}) + \overrightarrow{M_O}(\overrightarrow{R}) + \overrightarrow{M_\text{L}} = \vec{0}$, d'où on en déduit : $B_z = 0$ et $-d\,M_0\,g + m\,B_y = 0$.

Le champ magnétique $\overrightarrow{B}$ doit donc être orienté selon $\vec{e}_y$, et la distance d'équilibre est : $d = \dfrac{m\,B_y}{M_0\,g}$.

Exercice 5 : Moteur à courant continu à entrefer plan

On considère un moteur à courant continu à entrefer plan constitué d'une roue de rayon a qui tourne sans frottement à la vitesse angulaire $\omega(t)$ autour de son axe (Oz), et on note J son moment d'inertie. Cette roue présente plusieurs rayons métalliques qui assurent le fermeture du circuit électrique du moteur en joignant le centre de la roue et sa périphérie. La forme du contacteur situé en périphérie de la roue est telle qu'un seul rayon métallique participe à la conduction électrique à chaque instant, comme présenté ci-dessous. On note R la résistance totale du circuit électrique, qui est alimenté sous une tension continue U_0. L'ensemble baigne dans l'entrefer d'un aimant générant un champ magnétique stationnaire et uniforme $\overrightarrow{B} = B\,\vec{e}_z$.



On peut montrer que la surface infinitésimale $\mathrm{d}S$ balayée par un rayon de la roue pendant une durée infinitésimale $\mathrm{d}t$ s'exprime :

$$\mathrm{d}S = \frac{\omega(t)\,a^2\,\mathrm{d}t}{2}.$$

1. Exprimer la force électromotrice induite dans le circuit en fonction de B, a et $\omega(t)$.

2. En déduire l'expression de l'intensité $i(t)$.

3. Exprimer le moment scalaire par rapport à l'axe (Oz) de la force de Laplace que subie le rayon parcouru par l'intensité $i(t)$.

Par l'intermédiaire de son arbre de rotation, le moteur fournit un couple constant Γ à un dispositif extérieur, avec $\Gamma > 0$. Afin de le prendre en compte, on peut alors considérer que le rayon parcouru par l'intensité $i(t)$ subit un couple résistance $-\Gamma$.

4. Établir une équation différentielle vérifiée par la vitesse angulaire $\omega(t)$.

On suppose que le moteur démarre sans vitesse initiale à partir de l'instant $t = 0$. On note τ le temps caractéristique de son évolution et ω_p sa vitesse angulaire en régime permanent.

5. Exprimer les constantes τ et ω_p.

6. En déduire l'expression de $\omega(t)$ en fonction de ces constantes, puis tracer son évolution en fonction du temps.

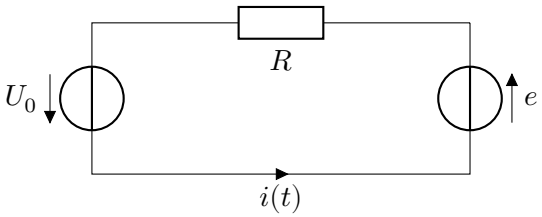
7. Exprimer l'intensité i_p en régime permanent, puis montrer que celle-ci est proportionnelle au couple Γ puisqu'il s'agit d'un moteur à courant continu.

8. Commenter l'évolution de ω_p en fonction de Γ, puis déterminer l'expression du couple maximal Γ_max que peut fournir ce moteur.

Correction :

1. Le flux magnétique à travers la surface $\vec{S} = S\,\vec{e}_z$ du circuit s'exprime : $\Phi = \vec{B}\cdot\vec{S} = B\,S$, où la valeur de S est inconnue. La force électromotrice induite dans le circuit s'exprime alors à l'aide de la loi de Faraday : $e = -\dfrac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t} = -B\,\dfrac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t} = -\dfrac{B\,\omega(t)\,a^2}{2}$.

2. On peut représenter le circuit électrique équivalent :



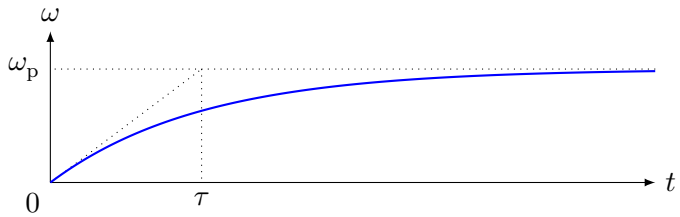
L'application de la loi des mailles donne : $U_0 + e = R\,i(t)$, soit : $U_0 - \dfrac{B\,\omega(t)\,a^2}{2} = R\,i(t)$, d'où : $i(t) = \dfrac{1}{R}\left(U_0 - \dfrac{B\,\omega(t)\,a^2}{2}\right)$.

3. La force de Laplace s'exprime en coordonnées cylindriques : $\vec{F}_\mathrm{L} = i\,(-a\,\vec{e}_r)\wedge B\,\vec{e}_z = i\,a\,B\,\vec{e}_\theta$. Comme elle s'applique en son centre d'inertie G, on en déduit que le moment scalaire par rapport à l'axe (Oz) s'exprime : $M_z(\vec{F}_\mathrm{L}) = \left(\overrightarrow{OG}\wedge\vec{F}_\mathrm{L}\right)\cdot\vec{e}_z = \left(\dfrac{a}{2}\,\vec{e}_r\wedge i\,a\,B\,\vec{e}_\theta\right)\cdot\vec{e}_z = \dfrac{i\,B\,a^2}{2} = \dfrac{1}{R}\left(U_0 - \dfrac{B\,\omega(t)\,a^2}{2}\right)\dfrac{B\,a^2}{2}$.

4. L'application du TMC au rayon donne : $J\dfrac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} = M_z(\vec{F}_\mathrm{L}) - \Gamma = \dfrac{1}{R}\left(U_0 - \dfrac{B\,\omega\,a^2}{2}\right)\dfrac{B\,a^2}{2} - \Gamma$, d'où l'équation différentielle : $\dfrac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} + \dfrac{B^2\,a^4}{4\,J\,R}\,\omega(t) = \dfrac{1}{J}\left(\dfrac{U_0\,B\,a^2}{2\,R} - \Gamma\right)$.

5. On peut écrire l'équation différentielle sous la forme canonique : $\dfrac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} + \dfrac{\omega(t)}{\tau} = \dfrac{\omega_\mathrm{p}}{\tau}$, avec $\tau = \dfrac{4\,J\,R}{B^2\,a^4}$ et $\omega_\mathrm{p} = \dfrac{1}{J}\left(\dfrac{U_0\,B\,a^2}{2\,R} - \Gamma\right)\tau = \dfrac{2\,U_0}{B\,a^2} - \dfrac{4\,\Gamma\,R}{B^2\,a^4}$.

6. La solution de l'équation différentielle s'exprime de la forme : $\omega(t) = C\exp\left(-\dfrac{t}{\tau}\right) + \omega_\mathrm{p}$, avec C une constante que l'on exprime à l'aide de la condition initiale : $\omega(0) = 0 = C + \omega_\mathrm{p}$, d'où : $C = -\omega_\mathrm{p}$, et on obtient finalement : $\omega(t) = \omega_\mathrm{p}\left[1 - \exp\left(-\dfrac{t}{\tau}\right)\right]$.
On trace son évolution en fonction du temps :

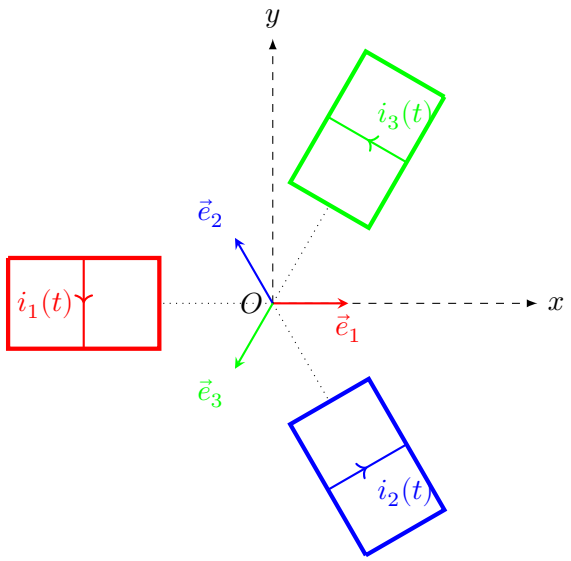


7. L'intensité en régime permanent s'exprime : $i_\mathrm{p} = \dfrac{1}{R}\left(U_0 - \dfrac{B\,a^2}{2}\,\omega_\mathrm{p}\right) = \dfrac{1}{R}\left[U_0 - \dfrac{B\,a^2}{2}\left(\dfrac{2\,U_0}{B\,a^2} - \dfrac{4\,\Gamma\,R}{B^2\,a^4}\right)\right]$, soit : $i_\mathrm{p} = \dfrac{2\,\Gamma}{B\,a^2}$, elle est bien proportionnelle au couple Γ.

8. Comme $\omega_\mathrm{p} = \dfrac{2\,U_0}{B\,a^2} - \dfrac{4\,\Gamma\,R}{B^2\,a^4}$, la vitesse angulaire en régime permanent diminue lorsque le couple augmente, jusqu'à s'annuler.
Le couple maximal que peut fournir ce moteur correspond donc à une vitesse angulaire nulle, soit : $\dfrac{2\,U_0}{B\,a^2} - \dfrac{4\,\Gamma_\mathrm{max}\,R}{B^2\,a^4} = 0$, d'où : $\Gamma_\mathrm{max} = \dfrac{U_0\,B\,a^2}{2\,R}$.

Exercice 6 : Champ tournant et moteur synchrone

Afin de générer un champ magnétique tournant pour un moteur synchrone, on dispose une bobine à chaque sommet d'un triangle équilatéral de centre O contenu dans le plan (xOy), comme représenté ci-dessous.



Les trois bobines sont parcourues par des courants sinusoïdaux de même amplitude I_0 et de même pulsation ω_0, mais déphasés de $\dfrac{2\,\pi}{3}$ entre eux, soit :

$$i_1(t) = I_0 \cos(\omega_0\, t) \qquad i_2(t) = I_0 \cos\left(\omega_0\, t - \frac{2\,\pi}{3}\right) \qquad i_3(t) = I_0 \cos\left(\omega_0\, t - \frac{4\,\pi}{3}\right)$$

On suppose que chaque bobine génère un champ magnétique au point O qui est orienté dans la direction de son axe et proportionnel au courant qui la parcourt, soit :

$$\overrightarrow{B}_1(t) = k\, i_1(t)\, \vec{e}_1 \qquad \overrightarrow{B}_2(t) = k\, i_2(t)\, \vec{e}_2 \qquad \overrightarrow{B}_3(t) = k\, i_3(t)\, \vec{e}_3$$

avec k une constante positive, et $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$ et $\vec{e}_3$ des vecteurs unitaires.

1. Exprimer le champ magnétique résultant au point O, puis montrer qu'il s'agit bien d'un champ tournant dont on exprimera la norme et la vitesse angulaire.

On modélise un moteur synchrone en plaçant un aimant de moment magnétique $\overrightarrow{m}$ au point O. En supposant qu'il réalise une rotation à la vitesse angulaire ω autour de l'axe (Oz), son moment magnétique peut s'exprimer de la forme :

$$\overrightarrow{m}(t) = m_0 \cos(\omega\, t + \varphi)\, \vec{e}_x + m_0 \sin(\omega\, t + \varphi)\, \vec{e}_y$$

avec m_0 une constante positive, et φ une constante telle que : $-\pi \leqslant \varphi < \pi$.

2. Exprimer le couple instantané subi par l'aimant dans le champ tournant, puis sa moyenne temporelle.

3. Sachant que la moyenne du couple ne doit pas être nulle pour que le moteur tourne, déterminer la vitesse angulaire ω de l'aimant en rotation, puis en déduire l'expression du couple correspondant.

4. Justifier l'appellation « synchrone » qui qualifie ce type de moteur.

5. Sachant que le couple doit être moteur pour entretenir la rotation de l'aimant, déterminer une condition sur la valeur de φ.

Correction :

1. Le champ magnétique résultant au point O s'exprime :
$\overrightarrow{B}(t) = \overrightarrow{B}_1(t) + \overrightarrow{B}_2(t) + \overrightarrow{B}_3(t) = k\, I_0 \cos(\omega_0\, t)\, \vec{e}_1 + k\, I_0 \cos\left(\omega_0\, t - \dfrac{2\,\pi}{3}\right) \vec{e}_2 + k\, I_0 \cos\left(\omega_0\, t - \dfrac{4\,\pi}{3}\right) \vec{e}_3$,
avec :

- $\vec{e}_1 = \vec{e}_x$;
- $\vec{e}_2 = \cos\left(\dfrac{2\,\pi}{3}\right) \vec{e}_x + \sin\left(\dfrac{2\,\pi}{3}\right) \vec{e}_y = -\dfrac{1}{2}\, \vec{e}_x + \dfrac{\sqrt{3}}{2}\, \vec{e}_y$;
- $\vec{e}_3 = \cos\left(\dfrac{4\,\pi}{3}\right) \vec{e}_x + \sin\left(\dfrac{4\,\pi}{3}\right) \vec{e}_y = -\dfrac{1}{2}\, \vec{e}_x - \dfrac{\sqrt{3}}{2}\, \vec{e}_y$;
- $\cos\left(\omega_0\, t - \dfrac{2\,\pi}{3}\right) = \cos(\omega_0\, t) \cos\left(\dfrac{2\,\pi}{3}\right) + \sin(\omega_0\, t) \sin\left(\dfrac{2\,\pi}{3}\right) = -\dfrac{1}{2} \cos(\omega_0\, t) + \dfrac{\sqrt{3}}{2} \sin(\omega_0\, t)$;
- $\cos\left(\omega_0\, t - \dfrac{4\,\pi}{3}\right) = \cos(\omega_0\, t) \cos\left(\dfrac{4\,\pi}{3}\right) + \sin(\omega_0\, t) \sin\left(\dfrac{4\,\pi}{3}\right) = -\dfrac{1}{2} \cos(\omega_0\, t) - \dfrac{\sqrt{3}}{2} \sin(\omega_0\, t)$;

et on obtient finalement : $\overrightarrow{B}(t) = \dfrac{3\, k\, I_0}{2} \left[\cos(\omega_0\, t)\, \vec{e}_x + \sin(\omega_0\, t)\, \vec{e}_y\right]$.

Il s'agit bien d'un champ tournant de norme $\dfrac{3\, k\, I_0}{2}$ qui tourne à la vitesse angulaire ω_0.

2. Le couple instantané s'exprime :
$\vec{\Gamma}(t) = \overrightarrow{m}(t) \wedge \overrightarrow{B}(t) = \dfrac{3\, k\, I_0\, m_0}{2} \left[\cos(\omega\, t + \varphi) \sin(\omega_0\, t) - \sin(\omega\, t + \varphi) \cos(\omega_0\, t)\right] \vec{e}_z$,
avec $\sin(\omega_0\, t) \cos(\omega\, t + \varphi) - \cos(\omega_0\, t) \sin(\omega\, t + \varphi) = \sin(\omega_0\, t - \omega\, t - \varphi)$, soit :
$\vec{\Gamma}(t) = \dfrac{3\, k\, I_0\, m_0}{2} \sin(\omega_0\, t - \omega\, t - \varphi)\, \vec{e}_z$.

On en déduit sa moyenne temporelle : $\left\langle \vec{\Gamma} \right\rangle = \dfrac{3\, k\, I_0\, m_0}{2} \left\langle \sin(\omega_0\, t - \omega\, t - \varphi) \right\rangle \vec{e}_z$.

3. La moyenne du couple est non nulle uniquement si $\omega = \omega_0$.

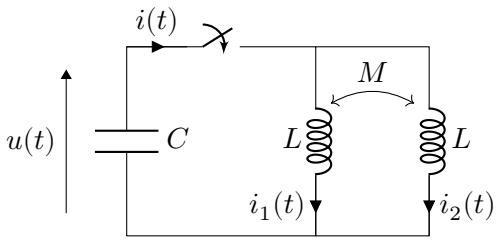
On peut alors exprimer le couple correspondant : $\vec{\Gamma} = \dfrac{3\, k\, I_0\, m_0}{2} \sin(-\varphi)\, \vec{e}_z = -\dfrac{3\, k\, I_0\, m_0}{2} \sin(\varphi)\, \vec{e}_z$.

4. Comme l'aimant tourne à la même vitesse que le champ, on dit qu'ils sont « synchrones ».

5. Le couple est moteur uniquement si $\Gamma > 0$, ce qui impose la condition : $-\pi < \varphi < 0$.

Exercice 7 : Oscillations avec des inductances couplées

Le condensateur de capacité C du circuit ci-dessous présente initialement une tension à ses bornes $u(0) = U_0$. Les deux bobines d'inductance propre L sont couplées entre elles par un coefficient d'inductance mutuelle M, et on note $i_1(t)$ et $i_2(t)$ les intensités qui les traversent.



On ferme l'interrupteur à l'instant $t = 0$, et on souhaite déterminer l'évolution de la tension $u(t)$ aux bornes du condensateur.

1. Établir un système de trois équations différentielles couplées liant $i_1(t)$, $i_2(t)$ et $u(t)$.

2. Établir l'équation différentielle vérifiée par $u(t)$.

3. En déduire l'expression de $u(t)$.

4. Par analogie avec un circuit LC série, déterminer l'inductance équivalence $L_{\text{éq}}$ à ces deux inductances couplées en parallèle.

Correction :

1. On obtient un système de trois équations différentielles couplées en exprimant :

- la tension aux bornes de la première bobine : $u(t) = L\,\dfrac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t} + M\,\dfrac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t}$.
- la tension aux bornes de la seconde bobine : $u(t) = L\,\dfrac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t} + M\,\dfrac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t}$.
- la loi des nœuds : $i(t) = i_1(t) + i_2(t)$, avec $i(t) = -C\,\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}$ en convention générateur, soit : $-C\,\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = i_1(t) + i_2(t)$.

2. En sommant les deux premières équations différentielles, on obtient : $2\,u(t) = L\,\dfrac{\mathrm{d}\,(i_1 + i_2)}{\mathrm{d}t} + M\,\dfrac{\mathrm{d}\,(i_1 + i_2)}{\mathrm{d}t}$, soit en utilisant la dernière équation : $2\,u(t) = L\left(-C\,\dfrac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}t^2}\right) + M\left(-C\,\dfrac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}t^2}\right)$, d'où : $\dfrac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}t^2} + \dfrac{2}{C\,(L+M)}\,u(t) = 0$.

3. En posant $\omega_0 = \sqrt{\dfrac{2}{C\,(L+M)}}$, on reconnait l'équation d'un oscillateur harmonique dont la solution peut s'écrire sous la forme : $u(t) = A\cos(\omega_0\,t) + B\sin(\omega_0\,t)$, avec A et B des constantes que l'on détermine à l'aide des conditions initiales :

- la première condition est : $u(0) = U_0 = A$;
- la seconde condition est due à la présence des inductances dans le circuit qui impose une évolution continue de l'intensité, soit juste après la fermeture de l'interrupteur : $i(0) = 0$, avec $i(t) = -C\,\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = -C\,[-\omega_0\,U_0\sin(\omega_0\,t) + \omega_0\,B\cos(\omega_0\,t)]$, d'où : $0 = -C\,[\omega_0\,B]$, et on en déduit : $B = 0$.

On obtient finalement : $u(t) = U_0\cos\left[\sqrt{\dfrac{2}{C\,(L+M)}}\,t\right]$.

4. Pour un circuit LC série d'inductance équivalence $L_{\text{éq}}$, la pulsation des oscillations s'exprime : $\omega_0 = \dfrac{1}{\sqrt{L_{\text{éq}}\,C}}$, d'où par identification : $L_{\text{éq}} = \dfrac{L+M}{2}$.